Capitolo 9

Cenni di controllo ottimo

Sommario. In questo capitolo si illustra nelle linee generali la sintesi ottima di controllori in retroazione dallo stato per sistemi lineari con obiettivo quadratico (regolatore LQ). Vengono inoltre analizzate le condizioni sotto le quali tale regolatore stabilizza internamente il sistema ad anello chiuso.

9.1 Introduzione

I metodi classici di sintesi finora analizzati si basano su

- l'assegnazione dei poli dominanti o degli autovalori sulla base di proprietà temporali della risposta libera o forzata del sistema,
- l'impostazione della risposta in frequenza sulla base di relazioni empiriche con la risposta forzata (sintesi per tentativi),
- criteri empirici (taratura dei regolatori industriali standard PID).

Alcuni metodi moderni invece si basano sulla caratterizzazione delle specifiche in termini di *norme di segnali*. Tali quantità soddisfano le proprietà standard di norma e sono di solito definite come l'integrale di una funzione positiva del segnale in questione. In particolare, come noto, la norma quadratica di un segnale a tempo discreto

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 \tag{9.1}$$

è legata all'energia del segnale stesso.
Le tecniche di controllo ottimo sono basate sul progetto della legge di controllo in modo da rendere minimo (o massimo) un opportuno funzionale detto *indice di costo* (o *di prestazione*). L'indice di costo è di solito definito in termini di norme di segnali, e tiene tipicamente conto della necessità di soddisfare obiettivi contrastanti tra loro, ciascuno dei quali viene pesato in maniera opportuna nel funzionale da ottimizzare. Il progetto del controllo secondo queste tecniche consiste quindi in un problema di ottimizzazione, in cui i vincoli sono costituiti dalla dinamica dell'impianto da controllare. L'incognita è rappresentata dalla sequenza di ingressi da applicare in un dato intervallo di tempo, eventualmente infinito. La soluzione di alcuni problemi standard si presenta sotto forma di legge di controllo in retroazione, dinamica o statica.

Si consideri un sistema dinamico lineare stazionario a tempo discreto [1]

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n \\ y_k = Cx_k \end{cases} \tag{9.2}$$

Assegnata una condizione iniziale x_0 ed un orizzonte temporale $0, 1, \ldots, K$, di desidera determinare la sequenza d'ingresso

$$U_K = [u_{K-1}\ u_{K-2}\ \ldots\ u_0]' \tag{9.3}$$

che applicata al sistema genera un'evoluzione tale da rendere minimo un opportuno indice di costo

$$J(U_K, x_0) \tag{9.4}$$

Si osservi che il valore dell'indice, fissato l'orizzonte temporale K, dipende solo dalla condizione iniziale e dalla sequenza d'ingresso, poichè l'evoluzione del sistema è deterministica.

---

[1] Il sistema può chiaramente rappresentare il modello discretizzato di un impianto a tempo continuo

Esempio 9.1 Assegnato uno stato iniziale x_0 ed uno stato finale $\bar{x}$, determinare la sequenza d'ingresso U_K che porta il sistema da x_0 a $\bar{x}$ in K passi minimizzando l'energia dell'ingresso stesso (controllo a energia minima). Il problema dato può essere formulato come il seguente problema di ottimizzazione:

$$\min_{U_K} J(U_K, x_0) \qquad \text{t.c.} \tag{9.5}$$

$$\bar{x} - A^K x_0 = R_K U_K \tag{9.6}$$

dove

$$J(U_K, x_0) = \sum_{k=0}^{K-1} u_k^2 \tag{9.7}$$

9.2 Controllo ottimo lineare quadratico (LQ) su orizzonte temporale finito

Definizione 9.1 Ricordiamo che una matrice quadrata M è detta definita positiva ($M > 0$) [o, rispettivamente, semidefinita positiva ($M \geq 0$)] se

$$x'Mx > 0 \quad [x'Mx \geq 0] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{9.8}$$

Dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto, una condizione iniziale x_0 ed un orizzonte temporale $0, 1, \ldots, K$, il problema di controllo LQ su orizzonte temporale finito si formula nel seguente modo: determinare la sequenza di ingressi U_K che minimizza l'indice di costo

$$J(U_K, x_0) = \sum_{k=0}^{K-1} [x_k'Qx_k + u_k'Ru_k] + x_K'Q_Kx_K \tag{9.9}$$

dove $Q \geq 0$, $R > 0$, $Q_K \geq 0$. Relativamente a questo problema, si osservi che il funzionale di costo codifica due obiettivi contrastanti:

- far tendere lo stato x_k a zero, penalizzandone la norma quadratica pesata $x_k'Qx_k$,
- mantenere bassa l'energia del segnale di comando, infatti il termine $u_k'Ru_k$ pesa l'intensità (potenza) dell'azione di controllo al generico istante, dunque la sua somma su tutto l'orizzonte temporale rappresenta l'energia del controllo stesso;

infine, il termine $x_K'Q_Kx_K$ pesa in modo separato lo scostamento dello stato finale x_K dallo stato zero, determinando l'esito dell'azione di controllo, ed è quindi detto costo terminale. Le matrici Q, R, Q_K determinano il peso relativo dei vari termini e quindi codificano le specifiche di progetto.

9.2.1 Soluzione del problema LQ

La soluzione del problema LQ consiste, come detto, nella determinazione della sequenza di ingresso U_K tale che, in corrispondenza di una data condizione iniziale x_0, il costo associato alla corrispondente evoluzione del sistema sia minimo, ovvero pari a

$$V_0(x_0) = \min_{U_K} J(U_K, x_0) = \min_{U_K} \sum_{k=0}^{K-1} [x_k'Qx_k + u_k'Ru_k] + x_K'Q_Kx_K \tag{9.10}$$

La strategia che segue per la soluzione del problema LQ trae il suo fondamento nel *principio della programmazione dinamica* (Bellman, 1940). Si supponga inizialmente di determinare, per ogni possibile valore di x_{K-1}, il valore dell'ingresso $u_{K-1} = u_{K-1}^*(x_{K-1})$ che permette di far evolvere il sistema da x_{K-1} a x_K con costo minimo. Evidentemente, qualunque sia la legge di controllo ottima per portare lo stato da x_0 ad x_K, l'ultimo passo di questa legge deve necessariamente essere costituito dall'ingresso $u_{K-1}^*(x_{K-1})$, poiché ogni altra scelta implica un costo più elevato per l'ultimo passo e quindi più elevato complessivamente. L'ingresso ottimo per l'ultimo passo si calcola come la soluzione di

$$\begin{aligned} V_{K-1}(x_{K-1}) &= \min_{u_{K-1}} \left[x_{K-1}'Qx_{K-1} + u_{K-1}'Ru_{K-1} + x_KP_Kx_K\right] \\ &= \min_{u_{K-1}} [x_{K-1}'Qx_{K-1} + u_{K-1}'Ru_{K-1} \\ &\quad +(Ax_{K-1} + Bu_{K-1})'P_K(Ax_{K-1} + Bu_{K-1})] \end{aligned} \tag{9.11}$$

dove si è posto $P_K = Q_K$.
Minimizzando rispetto a u_{K-1} si ottiene il valore ottimo dell'ingresso

$$u^*_{K-1} = -(R + B'P_K B)^{-1} B'P_K A x_{K-1} \tag{9.12}$$

e sostituendo (9.12) nella (9.11) si ottiene il costo ottimo relativo all'ultimo passo

$$V_{K-1}(x_{K-1}) = x'_{K-1} P_{K-1} x_{K-1} \tag{9.13}$$

dove

$$P_{K-1} = Q - A'P_K B(R + B'P_K B)^{-1} B'P_K A + A'P_K A. \tag{9.14}$$

Si supponga adesso di voler determinare la soluzione ottima per i due passi finali, per ogni possibile valore di x_{K-2}. Poiché l'ingresso ottimo necessario a compiere l'ultimo passo è noto qualunque sia il valore di x_{K-1}, il problema di progettare la strategia ottima in 2 passi si riduce a realizzare il minimo rispetto a u_{K-2} del funzionale costituito dal costo relativo al passo $K-2$ più il costo ottimo in un passo $V_{K-1}(x_{K-1})$, dove x_{K-1} è lo stato in cui evolve il sistema applicando u_{K-2}. Il costo ottimo per gli ultimi 2 passi è allora dato da

$$\begin{aligned} V_{K-2}(x_{K-2}) &= \min_{u_{K-2}} \left[x'_{K-2} Q x_{K-2} + u'_{K-2} R u_{K-2} + V_{K-1}(x_{K-1})\right] \\ &= \min_{u_{K-2}} \left[x'_{K-2} Q x_{K-2} + u'_{K-2} R u_{K-2} + x_{K-1} P_{K-1} x_{K-1}\right] \end{aligned} \tag{9.15}$$

Questa espressione del tutto analoga all'espressione (9.11) di $V_{K-1}(x_{K-1})$, a parte una traslazione indietro di un passo di tutti gli indici temporali. Pertanto, la soluzione u^*_{K-2} ha la stessa forma di u^*_{K-1} in (9.12), solo traslata indietro di un passo.
Iterando il ragionamento per un orizzonte temporale di j passi, al generico passo $k = K - j$ l'ingresso ottimo vale quindi

$$u^*_k = -(R + B'P_{k+1} B)^{-1} B'P_{k+1} A x_k \tag{9.16}$$

dove la successione P_k soddisfa

$$P_k = Q - A'P_{k+1} B(R + B'P_{k+1} B)^{-1} B'P_{k+1} A + A'P_{k+1} A \tag{9.17}$$

La successione di matrici (9.17) è nota come *ricorsione di Riccati*.
Le precedenti osservazioni suggeriscono allora il seguente algoritmo per la soluzione del problema di controllo ottimo LQ su un orizzonte temporale di K passi

$$\min_{U_K} J(U_K, x_0) = \min_{U_K} \sum_{k=0}^{K-1} [x'_k Q x_k + u'_k R u_k] + x'_K Q_K x_K \tag{9.18}$$

1. Si inizializza
$$P_K = Q_K \tag{9.19}$$
2. Per $j = K-1, K-2, \dots, 0$ si calcola
$$P_j = Q - A'P_{j+1} B(R + B'P_{j+1} B)^{-1} B'P_{j+1} A + A'P_{j+1} A \tag{9.20}$$
$$F_j = -(R + B'P_{j+1} B)^{-1} B'P_{j+1} A \tag{9.21}$$
3. L'ingresso ottimo al passo k è dato da
$$u^*_k = F_k x_k \tag{9.22}$$

Si osservi che la legge di controllo ottimo (9.22) è una retroazione tempo variante dallo stato.

9.3 Controllo LQ su orizzonte infinito

Nei casi pratici, l'obiettivo del controllo consiste nel far raggiungere al sistema una condizione di regime dopo un transitorio rispondente a determinate caratteristiche. Rispetto a questo problema, la soluzione ottima in senso LQ su orizzonte finito non è significativa. Sarebbe opportuno determinare una legge di controllo, se possibile in forma di retroazione statica dallo stato, che minimizzi il costo necessario a raggiungere la condizione di regime, quindi su un orizzonte temporale in generale infinito. Affinché questo possa essere ottenuto, è ovviamente necessario che il costo non diverga quando l'orizzonte temporale tende all'infinito. Infine, la legge di controllo ottima deve essere tale da stabilizzare asintoticamente (internamente) il sistema.
Il problema di controllo LQ su orizzonte infinito può essere formulato come segue:

$$V_\infty(x_0) = \min_U J(U, x_0) = \min_U \sum_{k=0}^{\infty} [x_k' Q x_k + u_k' R u_k] \tag{9.23}$$

dove U è la sequenza infinita di ingressi

$$U = [\ldots, u_1, u_0]' \tag{9.24}$$

La deduzione della soluzione di questo problema proposta in seguito è intuitiva e non ha alcuna pretesa di essere matematicamente rigorosa.
Si supponga di voler risolvere il problema su un orizzonte temporale $0, \ldots, K$ con K arbitrariamente grande, idealmente infinito. In questo caso, il costo terminale perde di significato e può essere assunto nullo. Si supponga pertanto di inizializzare la ricorsione di Riccati a $P_K = Q_K = 0$. Se si suppone che la ricorsione di Riccati converga a una matrice $P_{-\infty}$ per $k \to -\infty$, allora si ha $P_k \approx P_{-\infty}$ se $k << K$. Se si assume K tendente all'infinito, si tende allora ad avere $P_k = P_{-\infty}$ per ogni k finito, in particolare $P_{k+1} = P_k = P_{-\infty}$. Dunque la ricorsione di Riccati (9.17) diviene l'equazione algebrica

$$P_{-\infty} = Q - A' P_{-\infty} B (R + B' P_{-\infty} B)^{-1} B' P_{-\infty} A + A' P_{-\infty} A \tag{9.25}$$

detta *equazione algebrica di Riccati (ARE)*. L'ingresso ottimo (9.16) diviene allora

$$u_k^* = F_{-\infty} x_k \tag{9.26}$$

Sussistono in effetti i seguenti risultati, che diamo senza dimostrazione.

Teorema 9.1 *Sia la coppia (A, B) stabilizzabile. Allora la ricorsione di Riccati*

$$\begin{aligned} &P_K = 0 \\ &P_k = Q - A' P_{k+1} B (R + B' P_{k+1} B)^{-1} B' P_{k+1} A + A' P_{k+1} A \end{aligned} \tag{9.27}$$

converge a una matrice $P_{-\infty}$ simmetrica e semidefinita positiva. Tale matrice è una delle soluzioni della equazione algebrica di Riccati (ARE)

$$P_{-\infty} = Q - A' P_{-\infty} B (R + B' P_{-\infty} B)^{-1} B' P_{-\infty} A + A' P_{-\infty} A \tag{9.28}$$

Inoltre la ARE ammette almeno una soluzione simmetrica e semidefinita positiva.

Teorema 9.2 *Sia (A, B) stabilizzabile e sia $P_{-\infty}$ la soluzione simmetrica e semidefinita positiva di ARE che rappresenta il limite per $k \to -\infty$ della ricorsione di Riccati. Allora la legge di controllo in retroazione dallo stato*

$$u_k^* = F_{-\infty} x_k \tag{9.29}$$

dove

$$F_{-\infty} = -(R + B' P_{-\infty} B)^{-1} B' P_{-\infty} A \tag{9.30}$$

rende minimo il costo su orizzonte infinito $J(U, x_0)$.

9.3.1 Controllo LQ e stabilizzazione

È noto che ogni matrice simmetrica definita positiva è fattorizzabile nel prodotto di due matrici l'una la trasposta dell'altra. Si supponga di fattorizzare la matrice di peso Q come

$$Q = C'C \tag{9.31}$$

Ciò equivale a considerare il costo

$$J(U, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_k^2 + u_k' R u_k \right] \tag{9.32}$$

dove

$$y_k = C x_k \tag{9.33}$$

La formulazione (9.32) del funzionale di costo LQ può essere interpretata come la somma pesata dell'energia del segnale di ingresso e dell'energia del segnale di uscita del sistema, allorché l'uscita venga definita come in (9.33). Il seguente risultato fornisce le condizioni affinché la legge di controllo ottimo LQ stabilizzi internamente il sistema.

Teorema 9.3 *Sia (A, B) stabilizzabile e $Q = C'C$. Sia $P_{-\infty}$ la soluzione di ARE associata alla legge di controllo ottimo (limite della ricorsione). Tale legge di controllo stabilizza asintoticamente il sistema se e solo se la coppia (A, C) è rivelabile.*

Dimostrazione (qualitativa). Se la legge di controllo LQ esiste ed è ottima, ovvero rende minimo il funzionale $J(U, x_0)$, evidentemente la serie che lo definisce deve convergere. Ciò può avvenire solo se y_k e u_k sono entrambi convergenti a zero. Se il sistema è completamente osservabile, è noto che se l'uscita tende a zero allora devono tendere a zero anche tutte le componenti dello stato x_k. Se al contrario il sistema non è osservabile, il fatto che l'uscita tenda a zero non implica necessariamente che anche lo stato tenda a zero, in particolare le sue componenti inosservabili possono anche divergere. Se tuttavia il sistema è rivelabile, le componenti inosservabili sono asintoticamente stabili, e dunque la convergenza a zero dell'uscita implica la convergenza a zero di tutte le componenti dello stato e quindi la stabilità interna.
Il seguente risultato fornisce le condizioni di esistenza di soluzioni stabilizzanti dell'equazione algebrica di Riccati e ne caratterizza l'ottimalità in senso LQ.

Teorema 9.4 *Sia (A, B) stabilizzabile e $Q = C'C$, allora:*

1. *La ARE ammette al più una soluzione simmetrica semidefinita positiva P_s a cui corrisponde una legge di controllo stabilizzante*
2. *Tale soluzione esiste se e solo se la matrice $\begin{bmatrix} zI - A \\ C \end{bmatrix}$ ha rango pieno per ogni z complesso di modulo unitario*
3. *Se esiste la soluzione P_s, essa può essere ottenuta come limite per $k \to -\infty$ della ricorsione di Riccati, ed è quindi coincidente con la soluzione ottima $P_{-\infty}$ se (A, C) è rivelabile.*

9.3.2 Inseguimento ottimo in senso LQ

Si consideri il problema di determinare una legge di controllo (le matrici F e K dello schema in fig. 9.1) per inseguire a regime un riferimento costante $r_k = r$ minimizzando

$$J(U, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\tilde{y}_k^2 + \rho \tilde{u}_k^2 \right] \tag{9.34}$$

dove $\tilde{y}_k = y_k - r$ è l'errore di inseguimento e $\tilde{u}_k = u_k - u_\infty$ è lo scostamento del segnale di comando dal suo valore di regime.

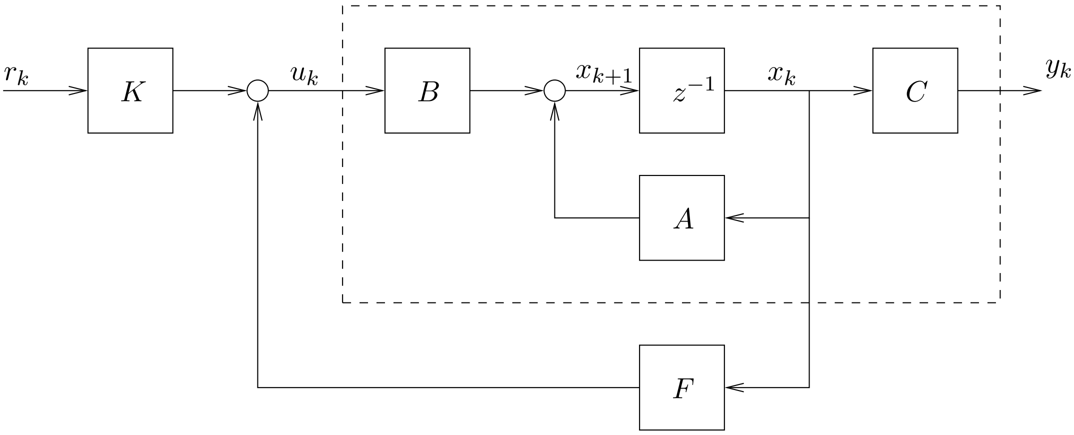

Figura 9.1: Schema per inseguimento di un riferimento costante

Osservazione 9.1 Si osservi che u_∞ è nullo se l'impianto contiene un'azione integrale (i.e., A ha autovalori in $z = 1$).

L'evoluzione degli scostamenti di x_k, y_k e u_k dai rispettivi valori di regime è descritta dalle equazioni

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= A\tilde{x}_k + B\tilde{u}_k \\ \tilde{y}_k &= C\tilde{x}_k \end{aligned} \tag{9.35}$$

Dunque il problema di inseguimento in senso LQ è un problema LQ standard per il sistema alle variazioni, con i pesi $Q = C'C, \quad R = \rho$. L'ingresso ottimo alle variazioni vale quindi

$$\tilde{u}_k^* = F_\infty \tilde{x}_k \tag{9.36}$$

Nello schema di controllo risulta

$$u_k = Fx_k + Kr \tag{9.37}$$

da cui

$$\tilde{u}_k = F\tilde{x}_k \tag{9.38}$$

e dunque l'ingreso ottimo si ottiene con lo schema visto ponendo $F = F_{-\infty}$ dove $F_{-\infty}$ risolve il problema LQ per (A, B) con i pesi dati. Il valore di K è scelto al solito per rendere unitario il guadagno in continua. La legge di controllo da applicare è definita allora da

$$F = F_{-\infty} \quad ; \quad K = \frac{1}{C(I - (A + BF_{-\infty}))^{-1}B} \tag{9.39}$$

Si osservi che se l'impianto ha autovalori in $z = 1$, allora $u_k = \tilde{u}_k$, per cui il costo pesa effettivamente l'energia del comando.

Osservazione 9.2 È possibile utilizzare un criterio di tipo LQ anche per progettare i parametri F e K dello schema di controllo con azione integrale, risolvendo il problema per il sistema aumentato (con una matrice Q di ordine $n + 1$). Nel costo corrispondente, oltre alle variabili di stato del sistema, viene pesata anche la variabile aggiuntiva q_k.